المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين لجهة الشرق
Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation de l'Oriental

Projet Personnel Encadré

dans le cadre de la Formation Qualifiante des Enseignants

Filière : Mathématiques – Enseignement Secondaire Qualifiant

Régression linéaire simple : aspects théoriques et application sous Python pour l'analyse de l'impact des heures de révision sur la note finale

---

Réalisée par :

CHAHROUD Yousra

Encadré par :

Mr. Derfoufi Younes

Date de soutenance : .....

Membres du jury :

- .....
- .....
- .....

Année de formation 2025–2026

Table des matières

1 Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce projet personnel.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon encadrant, **Dr. Younes Derfoufi**, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et son accompagnement tout au long de ce travail. Sa rigueur scientifique et sa bienveillance m'ont été d'une grande aide pour mener à bien cette recherche.

Je remercie également l'ensemble des enseignants et du personnel du **CRMEF d'Oujda** pour la qualité de la formation dispensée et pour les conditions favorables qu'ils m'ont offertes durant mon parcours.

Je n'oublie pas mes camarades et collègues de promotion, avec qui j'ai partagé des moments d'échange et d'entraide, ainsi que ma famille et mes proches, pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements constants.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, par leurs relectures et leurs suggestions, ont contribué à l'amélioration de ce document.

2 Introduction

Dans de nombreux domaines d'étude — qu'il s'agisse d'économie, de biostatistique, des sciences sociales ou encore de l'ingénierie — les chercheurs et praticiens sont régulièrement confrontés à une question centrale : *existe-t-il une relation entre deux phénomènes mesurables, et si oui, comment la modéliser ?* À titre d'exemple, peut-on expliquer la performance académique d'un étudiant par son temps de révision ? Le chiffre d'affaires d'une entreprise dépend-il linéairement de ses dépenses publicitaires ? La réponse à ces interrogations passe par l'utilisation d'outils statistiques permettant non seulement de décrire, mais aussi de prédire le comportement d'une variable à partir d'une autre.

C'est dans ce contexte que s'inscrit mon projet de fin d'études, consacré à l'étude et à l'application de la **régression linéaire simple**. Ce modèle statistique, fondamental en analyse de données, repose sur l'hypothèse qu'une variable dite *dépendante*, notée Y, peut être approchée par une fonction affine d'une variable *explicative*, notée X, à un terme d'erreur près. L'objectif est alors de déterminer la droite la mieux adaptée au nuage de points observés, d'évaluer la qualité de cet ajustement et de tester la significativité des relations mises en évidence.

Ce travail s'appuie dans un premier temps sur les concepts de base de la statistique inférentielle — population, échantillon, espérance, variance — avant de développer la théorie du modèle linéaire simple. Sont ainsi présentées les hypothèses fondamentales du modèle (linéarité, indépendance des erreurs, homoscédasticité, normalité), la méthode d'estimation des paramètres par les moindres carrés ordinaires (MCO), les propriétés des estimateurs (sans biais, convergence) ainsi que les principaux outils d'évaluation du modèle : coefficient de corrélation de Pearson, coefficient de détermination R^2, tests de Student et de Fisher.

À travers cette introduction, nous posons le cadre théorique nécessaire à la mise en œuvre pratique de la régression linéaire simple. Les chapitres suivants détailleront chaque étape et illustreront, sur des données réelles ou simulées, comment cette méthode permet d'expliquer, de valider et de prédire la relation entre deux variables quantitatives.

3 Rappel

Ce chapitre présente les concepts fondamentaux de statistique inférentielle, d'algèbre linéaire et de calcul des probabilités nécessaires à la compréhension des modèles de régression linéaire simple et multiple .

3.1 Concepts fondamentaux de statistique inférentielle

La statistique inférentielle vise à tirer des conclusions sur une population entière à partir de l'étude d'un sous-ensemble de celle-ci, appelé *échantillon*.

3.1.1 Population, variable et échantillon

Définition 3.1.1 (Population)**.** La **population** est l'ensemble complet des individus (sujets, objets, mesures) sur lesquels porte une étude statistique. La définition précise de la population d'intérêt est une étape cruciale avant toute analyse.

Définition 3.1.2 (Variable)**.** Une **variable** est une caractéristique mesurable ou observable qui peut prendre différentes valeurs pour les différents individus de la population (par exemple : âge, taille, revenu, catégorie socio-professionnelle). La nature de la variable (quantitative continue/discrète, qualitative nominale/ordinale) détermine les outils statistiques appropriés.

Définition 3.1.3 (Distribution)**.** La **distribution** d'une variable décrit la manière dont ses différentes valeurs possibles sont réparties au sein de la population. Elle peut être caractérisée par des mesures de tendance centrale, de dispersion, et par sa forme (par exemple : loi normale).

Définition 3.1.4 (Échantillon)**.** Un **échantillon** est un sous-ensemble d'individus sélectionnés dans la population. Pour que les inférences tirées de l'échantillon soient généralisables à la population, l'échantillon doit être **représentatif**. L'échantillonnage aléatoire simple est une méthode courante pour tenter d'assurer cette représentativité.

Définition 3.1.5 (Modèle d'échantillonnage)**.** Le **modèle d'échantillonnage** décrit les hypothèses faites sur la manière dont l'échantillon a été constitué à partir de la population. Le modèle le plus courant est celui de l'échantillon aléatoire simple, où les observations $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ sont supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon la loi de la variable dans la population.

3.1.2 Espérance et variance

Ces concepts décrivent les caractéristiques centrales d'une variable aléatoire (théoriques) et d'un échantillon (empiriques).

Définitions théoriques

Soit X une variable aléatoire.

Définition 3.1.6 (Espérance mathématique)**.** L'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}[X]$ ou μ, est la valeur moyenne théorique de la variable.

— Si X est discrète, prenant les valeurs x_i avec probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

— Si X est continue avec une densité $f(x)$:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx$$

Définition 3.1.7 (Variance)**.** La **variance** de X, notée $\mathbb{V}(X)$ ou σ^2, mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

(Formule de König-Huygens)

Définition 3.1.8 (Écart-type)**.** L'**écart-type** de X, noté σ_X ou simplement σ, est la racine carrée de la variance :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Il s'exprime dans la même unité que la variable X.

Propriété 3.1.1 (Propriétés de l'espérance et de la variance)**.** Soient X, Y des variables aléatoires, et $a, b \in \mathbb{R}$ des constantes :

— $\mathbb{E}[aX + b] = a \, \mathbb{E}[X] + b$ (linéarité)

— $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

— $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \, \mathbb{V}(X)$

— $\mathbb{V}(X) \geq 0$

— Si X et Y sont indépendantes : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Mesures empiriques (Échantillon)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n.

Définition 3.1.9 (Moyenne empirique)**.** La **moyenne empirique** (ou moyenne de l'échantillon), notée $\bar{X}$, est définie par :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

C'est un estimateur de l'espérance $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Définition 3.1.10 (Variance empirique biaisée)**.** La **variance empirique biaisée** est donnée par :

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

C'est un estimateur sans biais de la variance σ^2 lorsque les X_i sont i.i.d.

Définition 3.1.11 (Écart-type empirique corrigé)**.** L'**écart-type empirique corrigé**, noté S, est la racine carrée de la variance empirique corrigée :

$$S = \sqrt{S^2}$$

4 Régression linéaire simple

Ce chapitre est une introduction à la modélisation linéaire par le modèle le plus élémentaire, la régression linéaire simple. Le principe de ce modèle est de supposer qu'une variable Y est expliquée, modélisée par une fonction affine d'une seule variable explicative X. Après avoir explicité les hypothèses nécessaires et les termes du modèle, on discute les méthodes d'estimation des paramètres, les lois des estimateurs, les intervalles de confiance puis la signification des tests d'hypothèse et la qualité d'ajustement du modèle dont le but est la prévision.

4.1 Modèle de la régression linéaire simple :

Définition 4.1.1. La régression linéaire simple est une méthode statistique qui modélise la relation entre une variable dépendante Y et une variable indépendante X à l'aide d'une équation linéaire.

Cette relation est généralement exprimée par l'équation :

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \epsilon$$

où :

- β_0 est l'ordonnée à l'origine, représentant la valeur de Y lorsque $X = 0$.
- β_1 est le coefficient de régression, indiquant la variation de Y pour une unité de variation de X .
- ϵ est le terme d'erreur, reflétant les variations de Y non expliquées par X.

Pour n observations, on peut écrire le modèle de régression linéaire simple sous la forme :
$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$

- ϵ_i est une variable aléatoire, non observée,
- x_i est observée et non aléatoire
- y_i est observée et aléatoire.

Le principe de la régression linéaire simple est de trouver la droite (c'est-à-dire déterminer son équation) qui passe au plus prés de l'ensemble des points formés par les couples (x_i, y_i).

4.1.1 Écriture matricielle

Notons que le modèle de régression linéaire peut encore s'écrire sous forme matricielle, comme suit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

telle que :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} et \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

4.2 Hypothèses du modèle

Pour qu'un modèle de régression linéaire puisse être construit et interprété de manière fiable, et pour que les méthodes d'estimation qui en découlent puissent produire des conclusions valides, il est indispensable de poser un certain nombre d'hypothèses sur la nature des données et des erreurs. Ces hypothèses constituent le cadre théorique du modèle : elles sont essentielles pour comprendre ses propriétés, ses limites et les conditions dans lesquelles ses résultats peuvent être généralisés. Elles s'appliquent de manière similaire dans les cas de régression linéaire simple comme multiple.

4.2.1 Hypothèse de linéarité

l'hypothèse de linéarité stipule que la relation entre la variable indépendante Xet la variable dépendante Y peut être modélisée par une fonction linéaire. En d'autres termes, un changement unitaire dans la variable explicative doit entraîner un changement constant dans la variable réponse. Cette hypothèse peut être vérifiée graphiquement à l'aide d'un nuage de points, où la tendance linéaire peut être visualisée. En d'autres termes, la moyenne de Y, pour une valeur donnée de X, doit se situer sur une droite définie par l'équation :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \beta_\mathbf{0} + \beta_\mathbf{1}\mathbf{x}$$

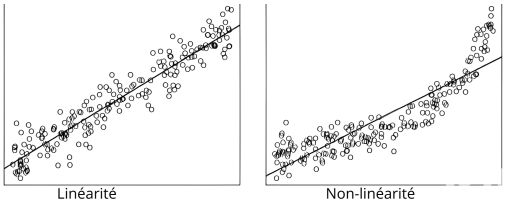


FIGURE 4.1 – Illustation de relation linéaire et non linéaire entre variables

4.2.2 Hypothèse d'indépendance des erreurs

Cette hypothèse stipule que les erreurs (ou résidus) ϵ_i du modèle de régression sont indépendantes les unes des autres. En d'autres termes, il n'y a pas de corrélation entre les erreurs pour des observations différentes. Mathématiquement, cela s'exprime par :

$$Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq j$$

4.2.3 Hypothèse d'homoscédasticité

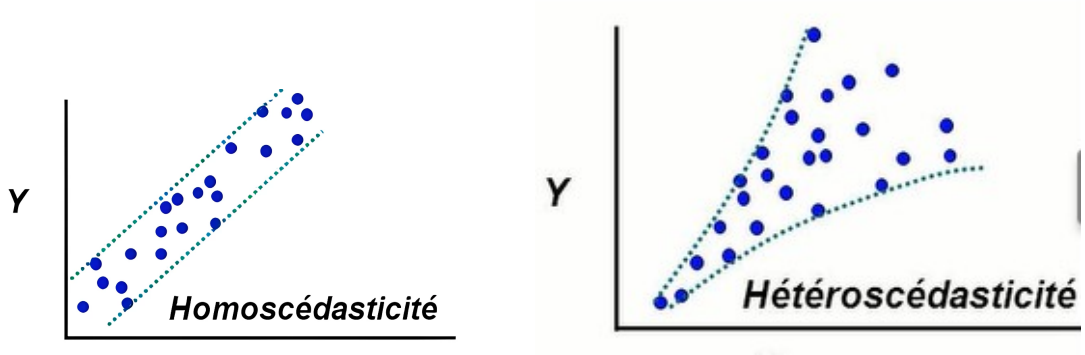
Une autre hypothèse clé est celle de l'homoscédasticité, qui stipule que la variance des résidus doit être constante à travers toutes les valeurs prédites. Cela signifie que l'éparpillement des résidus ne doit pas changer selon les valeurs de la variable dépendante. Si la variance des résidus augmente ou diminue

systématiquement, on parle alors d'hétéroscédasticité, ce qui peut entraîner des estimations biaisées et réduire la précision des prévisions.

$$\mathbb{V}(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

Ou de manière équivalente :

$$\mathbb{V}(y_i) = \sigma^2, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$



4.2.4 Hypothèse de normalité

Les erreurs doivent être normalement distribuées autour de la droite de régression pour chaque groupe de X. Cela est crucial pour la validité des tests d'hypothèses statistiques et pour assurer que les intervalles de confiance soient fiables.
On peut formuler cette hypothèse comme suit :

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

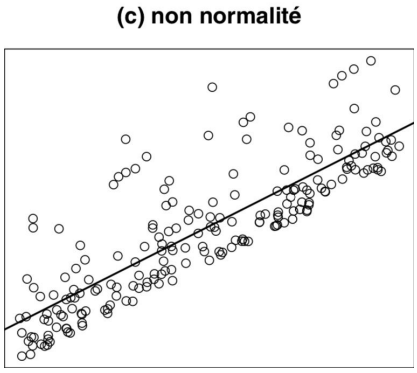


FIGURE 4.2 – Nuage de points lorsque l'hypothèse de normalité n'est pas respectée

4.3 Estimation des paramètres méthode des moindres carrés

Une fois le modèle de régression linéaire défini et ses hypothèses fondamentales posées, l'étape suivante consiste à estimer les valeurs inconnues de ses paramètres, notamment le vecteur des coefficients de régression $\beta = (\beta_0, \beta_1)^T$ ainsi que la variance des erreurs σ^2. Ces paramètres traduisent respectivement l'influence des variables explicatives sur la variable dépendante, et la dispersion des erreurs autour de la droite de régression. La Méthode des Moindres Carrés (MMC) est la méthode d'estimation la plus utilisée et la plus intuitive. Elle repose sur le principe de la minimisation de l'erreur quadratique. Il s'agit de déterminer les valeurs des coefficients β qui minimisent la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées de la variable dépendante Y_i et les valeurs prédites par le modèle $\hat{Y}_i$. Il convient de souligner que, si la MMC permet d'obtenir directement une estimation analytique des coefficients β, elle ne fournit pas d'estimation directe de la variance des erreurs σ^2 dans le cadre même de sa procédure de minimisation. Cette dernière est généralement obtenue de manière secondaire, à partir des résidus calculés après l'estimation de β.

4.3.1 Principe de la méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) vise à estimer les paramètres β_0 (ordonnée à l'origine) et β_1 (pente) du modèle de régression linéaire :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

où ε_i représente l'erreur aléatoire.

La méthode consiste à minimiser une **fonction de coût** (ou critère) qui mesure l'écart global entre les valeurs observées y_i et les valeurs prédites par le modèle :

$$J(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

Cette fonction quadratique est appelée **somme des carrés des résidus** (SCR). Elle présente les propriétés suivantes :

- Toujours positive (somme de carrés)
- Convexe (admet un minimum global unique sous certaines conditions)
- Sensible aux valeurs aberrantes (car les erreurs sont au carré)

Le problème d'optimisation s'écrit formellement :

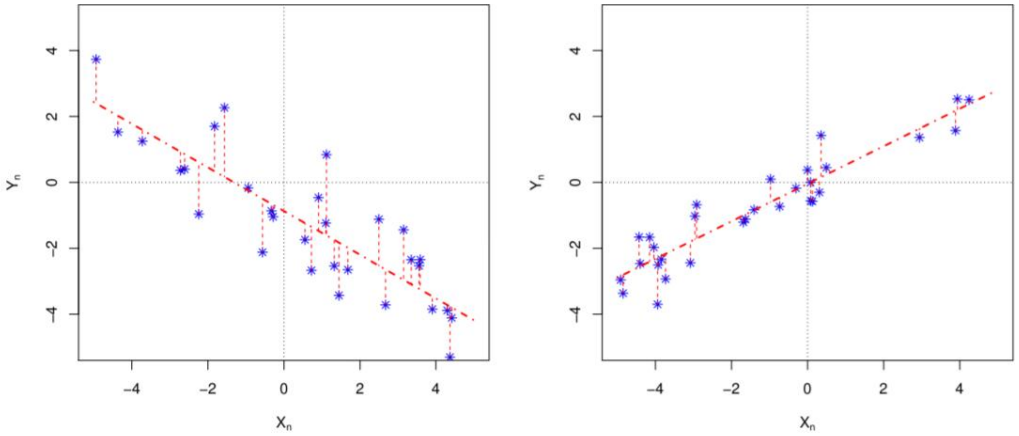
$$(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) = \underset{(\beta_0,\beta_1)\in\mathbb{R}^2}{\text{Arg min}} J(\beta_0, \beta_1) = \underset{(\beta_0,\beta_1)\in\mathbb{R}^2}{\text{Arg min}} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2$$

- **Vocabulaire :**

- $\hat{y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$: valeur prédite par le modèle
- $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$: résidu (erreur observée)
- $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$: mesure la qualité d'ajustement du modèle

- **Interprétation graphique**

  Graphiquement, $\widehat{\beta}_0$ et $\widehat{\beta}_1$ sont construits pour minimiser les distances verticales entre les observations (y_n) et la droite de régression théorique $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Nous avons représenté ces distances sur les figures ci-dessous.



  La droite d'équation $y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x$ est la droite de régression estimée sur le nuage de points.

Pour la régression linéaire simple, la fonction de coût est donnée par

$$J(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 .$$

Théorème 4.3.1.
J est strictement convexe et admet un unique minimum global.

■

4.3.2 Calcul des estimations des paramètres :

On appelle estimateurs des moindres carrés ordinaires (MCO) de β_0 et β_1 les estimateurs $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_1$ tels que

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \underset{(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2}{\arg\min} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

la méthode des moindres carrés consiste à chercher les valeurs pour β_0 et β_1 de telle sorte que la somme des carrés des erreurs $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ soit la plus petite possible, c'est-à-dire que la droite passe le plus près possible de l'ensemble des points.

la résolution de ce problème de minimisation mène aux esimations $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_0$ des paramètres β_1 et β_0 suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{Cov(x,y)}{Var(x)} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \end{cases}$$

■

4.3.3 Interprétation des estimations

Le signe des coefficients β_0 et β_1 est essentiel pour estimer le comportement de la regression

- Influence du signe de β_1 (la pente) :
  - **Si** $\beta_1 > 0$: La droite est **croissante** $\rightarrow$ relation positive entre X et Y. *Exemple* : plus X croît (comme les heures de révision), plus Y croît (la note).
  - **Si** $\beta_1 < 0$: La droite est **décroissante** $\rightarrow$ relation négative entre X et Y. *Exemple* : plus X augmente (comme le stress), plus Y diminue (la performance).
  - **Si** $\beta_1 = 0$: La droite est **horizontale** $\rightarrow$ absence de relation linéaire entre X et Y.

- Effet du signe de β_0 (l'ordonnée à l'origine) :
  - **Si** $\beta_0 > 0$: Lorsque $X = 0$, la valeur prédite de Y est positive. *Exemple* : si $\beta_0 = 10$, même sans heures de révision ($X = 0$), la note prévue (Y) est 10.
  - **Si** $\beta_0 < 0$: Lorsque $X = 0$, Y commence en dessous de zéro. *Remarque* : Ce cas peut être irréaliste selon le contexte (exemple : une note négative n'a pas de sens).

4.3.4 Propriétés des estimateurs des MCO :

Théorème 4.3.2.
Les coefficiants $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont des estimateurs sans biais de β_0 et β_0.

■

On peut ègalement exprimer la variances et la covariance de ces estimateurs

Théorème 4.3.3.
Les variances des estimateurs sont :

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right) \tag{4.1}$$

et

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{4.2}$$

tandis que leur covariance vaut :

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\sigma^2 \bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{4.3}$$

■

Théorème 4.3.4.

les estimateurs de MCO $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont convergents. Cela se traduit par le fait que la variance de l'estimateur tend vers zéro :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\hat{\beta}_0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\hat{\beta}_1) = 0.$$

■

Maintenant, proposons un estimateur sans biais de σ^2

Théorème 4.3.5.
La statistique $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{(n-2)}$ est un estimateur sans biais de σ^2.

■

4.3.5 Propriétés de l'erreur :

- ε_i est l'erreur inconnue introduite dans la spécification du modèle :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \tag{4.4}$$

- L'estimation des paramètres du modèle nous a permis de déduire la valeur estimée de l'endogène Y pour l'individu i :

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \tag{4.5}$$

- Ainsi, on déduit l'erreur observée $\hat{\varepsilon}_i$, appelée « résidu », à partir de (4.6)-(4.7) :

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

Remarque 4.3.1.

- La relation $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ montre que la droite des MCO passe par le centre de gravité du nuage $(\bar{x}, \bar{y})$.
- Les expressions obtenues pour $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ montrent que ces deux estimateurs sont linéaires par rapport au vecteur $Y = [y_1, \ldots, y_n]'$.
- La somme des résidus est nulle

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i \\
&= n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\beta}_0 - n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1 x_i \\
&= n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}_1 \bar{x} \\
&= n\hat{\beta}_0 - n\underbrace{(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x})}_{\hat{\beta}_0}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i = 0$$

- Minimiser le critères des moindres carrées revient donc à définir la droite de régression comme étant la droite pour laquelle les erreurs de édiction ont une moyenne nulle et une variance minimale.

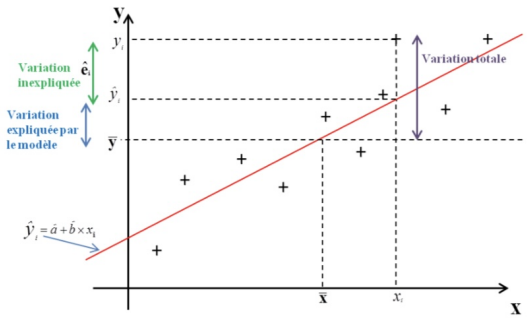


FIGURE 4.3 – Droite obtenue par régression linéaire simple

4.4 Evaluation de la qualité de la régression

Une fois les coefficients du modèle de régression estimés, que ce soit par la méthode des moindres carrés ordinaires, la descente de gradient, ou le maximum de vraisemblance, l'étape suivante consiste à évaluer la pertinence et la qualité de cet ajustement.
Cette évaluation permet de déterminer si le modèle est non seulement statistiquement valide, mais aussi s'il offre une bonne capacité explicative et prédictive des phénomènes étudiés.
Elle s'appuie sur des indicateurs clés tels que le coefficient de détermination (R^2) et le coefficient de corrélation r.

4.4.1 Coefficient de corrélation de Pearson :

Le **coefficient de corrélation de Pearson**, noté r, mesure la force et la direction de la relation linéaire entre deux variables quantitatives. Sa valeur est comprise entre -1 et $+1$:

$$r = \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1; 1]$$

- $r = +1$: corrélation linéaire positive parfaite.
- $r = -1$: corrélation linéaire négative parfaite.
- $r = 0$: absence de corrélatie on linéaire.

L'interprétation de la valeur absolue de r est donnée par le tableau suivant :

Valeur de $\lvert r \rvert$	**Interprétation**
$0.0 \leq \lvert r \rvert < 0.2$	Corrélation très faible ou négligeable
$0.2 \leq \lvert r \rvert < 0.4$	Corrélation faible
$0.4 \leq \lvert r \rvert < 0.6$	Corrélation modérée
$0.6 \leq \lvert r \rvert < 0.8$	Corrélation forte
$0.8 \leq \lvert r \rvert \leq 1.0$	Corrélation très forte

Ainsi, si $r \geq 0.8$, cela indique une **corrélation très forte et positive** entre les deux variables.
À l'inverse, si $r \leq -0.8$, on parle d'une **corrélation très forte et négative**.

4.4.2 Coefficient de détermination R^2

Le **coefficient de détermination**, noté R^2, est une mesure statistique qui évalue la proportion de la variance de la variable dépendante y expliquée par la ou les variables indépendantes x dans un modèle de régression. Il est défini par la formule suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\text{variabilité expliquée (SCE)}}{\text{variabilité totale (SCT)}} = 1 - \frac{\text{SCR}}{\text{SCT}}$$

- $R^2 = 1$: le modèle explique parfaitement la variance de y ;
- $R^2 = 0$: le modèle n'explique aucune variance de y ;
- $0 < R^2 < 1$: le modèle explique partiellement la variance de y.

Dans le cas d'une régression linéaire simple (une seule variable explicative), le coefficient de détermination est égal au carré du coefficient de corrélation de Pearson r entre x et y :

$$R^2 = r^2$$

Cette relation indique que R^2 mesure la proportion de la variance de y expliquée par x. Par exemple, si $r = 0.9$, alors $R^2 = 0.81$, ce qui signifie que 81% de la variance de y est expliquée par x

Remarque 4.4.1. Un R^2 élevé indique une bonne qualité d'ajustement du modèle, mais ne garantit pas la validité du modèle. Il est essentiel de compléter cette analyse par l'examen des résidus et d'autres tests diagnostiques pour évaluer la pertinence du modèle.

4.5 Tests des hypothèses

Lorsqu'un modèle de régression linéaire est ajusté et que ses paramètres sont estimés, il reste une étape critique à accomplir avant de pouvoir parler de relations découvertes. Trouver l'équation de la droite ou de l'hyperplan qui semble s'adapter le mieux selon le principe des moindres carrés ne suffit pas ; il est impératif de vérifier que des relations fur découvertes, et non simplement que les caractéristiques rencontrées durant l'étude d'une certaine relation étaient accidentellement vraies dans l'échantillon. C'est à ce point es test d'hypothèse et de signification statistique entre en scène. Cette section traite des techniques statistiques qui nous apprennent à décider quelles des variables explicatives ne convient pas dans ce modèle et quelle est la confiance exprimée dans l'acceptation du modèle tout entier.
Avant de procéder aux tests d'hypothèses, il est essentiel de caractériser la distribution des estimateurs des coefficients

4.5.1 Distribution

Pour effectuer des tests d'hypothèses sur les coefficients de régression β_0 et β_1, il est essentiel de connaître la distribution d'échantillonnage de leurs estimateurs par Moindres Carrés Ordinaires (MCO), $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$. Cette distribution dépend crucialement des hypothèses du modèle de régression linéaire classique, en particulier l'hypothèse de normalité des erreurs.
On considère le modèle suivant : $\forall i \in 0, ...n$

$$y_i = \beta_1 x_i + \beta_0 + \epsilon_i$$

On sait que $\hat{\beta}_0$ a une espérance :

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

et une variance :

$$V(\hat{\beta}_0) = \sigma^2_{\hat{\beta}_0}$$

c'est à dire :

$$\hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \sigma^2_{\hat{\beta}_0})$$

Donc la forme standardisée :

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sigma_{\hat{\beta}_0}} \sim N(0, 1)$$

or :

$$\sigma^2_{\hat{\beta}_0} = \sigma^2_\epsilon \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

Ainsi :

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0} = \hat{\sigma}^2_{\epsilon} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right)$$

D'après hypothèse de normalité des Erreurs

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2_{\epsilon})$$

Donc :

$$\frac{\epsilon_i}{\sigma_{\epsilon}} \sim N(0,1)$$

Comme $\hat{\epsilon}_i$ est une réalisation de ϵ_i :

$$\frac{\hat{\epsilon}_i}{\sigma_{\epsilon}} \sim N(0,1)$$

Passant au carré et sommant par rapport à i :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\hat{\epsilon}_i}{\sigma_{\epsilon}} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2}{\sigma^2_{\epsilon}} \sim \chi^2_{(n-2)}$$

On a l'estimateur de la variance :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2}{n-2} = \hat{\sigma}^2_{\epsilon}$$

donc :

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_{\epsilon}}{\sigma^2_{\epsilon}} \sim \chi^2_{(n-2)}$$

Ainsi :

$$\frac{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0}}{\sigma^2_{\hat{\beta}_0}} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\epsilon}}{\sigma^2_{\epsilon}} \sim \frac{\chi^2_{(n-2)}}{n-2}$$

Par conséquent :

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}0}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{(n-2)}/(n-2)}} = t_{(n-2)}$$

On trouve de même :

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{(n-2)}/(n-2)}} = t_{(n-2)}$$

4.5.2 Test de Fisher

Le test de Fisher permet de vérifier si le modèle de régression linéaire simple est globalement significatif, c'est-à-dire si la variable explicative X a une influence réelle sur la variable dépendante Y.

le test de Ficher est se basé sur la démarche suivante :

1. Énoncé des hypothèses :

- H_0 :$\beta_1 = 0$ (aucune influence de X sur Y :)
- H_1 :$\beta_1 \neq 0$

2. Calcul de la statistique F de Fisher :

$$F = \frac{CME}{CMR} = \frac{SCE/1}{SCR/(n-2)} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}}$$

où :

Source de variation	**Somme des carrés**	**Degrés de liberté**	**Carrés moyens**
Expliquée	$SCE = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	$CME = \frac{SCE}{1}$
Résiduelle	$SCR = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-2$	$CMR = \frac{SCR}{n-2}$
Totale	$SCT = \sum(y_i - \bar{y})^2$	$n-1$	-

TABLE 4.1 – Tableau d'analyse de la variance pour la régression linéaire simple

Selon le type de variation on remarque que :

- Pour la régression : 1 (car une seule variable explicative),
- Pour l'erreur (résiduelle) : $n-2$ (dans le cas d'une régression linéaire simple).
- R^2 est le coefficient de détermination, mesurant la proportion de la variance totale de Y expliquée par le modèle.

3. Choix du risque α :
Généralement, le choix du risque α est fixé à 5%.
4. Lecture de la valeur critique dans la table de fisher :
Elle est obtenue à partir de la table de Fisher avec $(1, n-2)$ degrés de liberté.

— Par exemple, pour un échantillon de taille $n = 6$, on a $ddl = (1, 4)$, et la valeur critique est $F_{\text{critique}} = 7{,}71$.

5. Comparaison :

— Si $F_{\text{calculé}} > F_{\text{critique}}$, alors on rejette l'hypothèse nulle H_0 : le modèle est significatif à 95%, il existe une relation entre X et Y.

— Si la *p-value* (généralement fournie par les logiciels) est inférieure ou égale à α, on rejette également H_0.

v2 \ v1	1	2	3	4	5	6
1	161.45	199.50	215.70	224.58	230.16	234.00
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.34
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.98	3.87
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58

TABLE 4.1 – La table ANOVA à $\alpha = 5\%$

4.5.3 Test de Student

Le test de Student (ou test t) est utilisé pour évaluer la significativité de chaque coefficient individuellement. Plus particulièrement, pour la pente β_1, le test t permet de déterminer si la variable explicative X a une influence linéaire significative sur la variable dépendante Y.
Généralement, pour un coefficient β_i (où i est 0 ou 1), le test de Student s'articule autour des hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_1 : \beta_i \neq 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 0 \text{ ou } 1.$$

On rejete H_0 si

$$\left| \frac{\hat{\beta} i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta} i}} \right| \geq t_{n-2,1-\alpha/2}$$

avec $t_{n-2,1-\alpha/2}$ est le quantile de la loi de Student à $n-2$ degrés de liberté

– **Test sur β_1 :**

Sous l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$, on a :

$$T_n = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim \mathcal{T}(n-2).$$

Pour une hypothèse alternative

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (test bilatéral), on rejette H_0 avec un risque $0 \leq \alpha \leq 1$ si :

$$|t| \geq t_{n-2,1-\alpha/2} \quad \textit{où t est la réalisation de} T_n.$$

Dans ce cas, nous disons que la relation linéaire entre X et Y est significative au seuil α.
Si

$$|t| < t_{n-2,1-\alpha/2}$$

dans ce cas Y ne dépend pas linéairement de X. Le modèle devient alors :

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i$$

Le modèle proposé $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ est inadéquat. Nous testons alors un nouveau modèle.

– **Test sur β_0 :**

Si $\beta_0 = 0$, alors la relation entre les variables dépend uniquement de β_1, et la droite de régression passe par l'origine.

n\α	90 %	80 %	70 %	60 %	50 %	40 %	30 %	20 %	10 %	5 %	2 %	1 %
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.1270	0.2562	0.3900	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.1269	0.2560	0.3896	0.5309	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.1267	0.2556	0.3890	0.5300	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
35	0.1266	0.2553	0.3885	0.5292	0.6816	0.8520	1.0520	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
40	0.1265	0.2550	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
45	0.1264	0.2549	0.3878	0.5281	0.6800	0.8497	1.0485	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
55	0.1262	0.2546	0.3873	0.5275	0.6790	0.8482	1.0463	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.6780	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.1260	0.2541	0.3866	0.5263	0.6772	0.8456	1.0424	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.1260	0.2540	0.3864	0.5261	0.6770	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
150	0.1259	0.2538	0.3861	0.5255	0.6761	0.8440	1.0400	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090
200	0.1258	0.2537	0.3859	0.5252	0.6757	0.8434	1.0391	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006

FIGURE 4.4 – Table de la loi de Student

4.6 NumPy : bibliothèque de calcul scientifique

NumPy (Numerical Python) est une bibliothèque fondamentale pour le calcul scientifique en langage Python. Elle fournit des structures de données performantes, notamment les tableaux multidimensionnels (`ndarray`), ainsi qu'un large ensemble de fonctions vectorisées.

Dans le contexte de la régression linéaire simple, NumPy permet de représenter efficacement les séries de données statistiques (x_i, y_i) sous forme de vecteurs. Les opérations nécessaires à l'estimation des paramètres (moyennes, écarts, produits scalaires, sommes) sont directement implémentées dans cette bibliothèque.
Les principales fonctionnalités de NumPy pertinentes pour l'analyse de régression sont :

- La création de tableaux à partir de données statistiques.
- Les fonctions `mean()`, `sum()`, `std()` pour les calculs descriptifs de base.
- Les opérations arithmétiques vectorisées (addition, multiplication, soustraction) sans recours à des boucles explicites.
- La gestion des matrices et des produits matriciels via `dot()` ou l'opérateur `@`.

Ces fonctionnalités font de NumPy un outil de choix pour implémenter les méthodes des moindres carrés, qu'il s'agisse de la forme algébrique classique ou de la formulation matricielle $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}$.

5 Partie pratique

Ce chapitre du rapport traite de l'application pratique des concepts de régression linéaire simple pour estimer la note finale d'un étudiant en fonction du nombre d'heures de révision. Nous allons construire et valider un modèle statistique, en suivant une approche étape par étape pour garantir la fiabilité de nos résultats et la pertinence de nos conclusions. La méthodologie couvrira la préparation des données, l'estimation du modèle de régression, sa validation rigoureuse, ainsi qu'une analyse et une interprétation détaillées des résultats obtenus.

5.1 Description des données

Cette section vise à démontrer l'application concrète de la régression linéaire simple dans un contexte réel de prédiction. Il s'agit ici de construire un modèle statistique capable d'estimer la note finale d'un étudiant à partir d'une variable explicative :

- Le nombre d'heures de révision.

L'hypothèse est la suivante : plus un étudiant révise, plus sa note finale tend à être élevée.

5.1.1 Source des données

Le jeu de données utilisé pour cette étude a été collecté auprès d'étudiants. Il contient 30 observations comprenant le nombre d'heures de révision et la note finale obtenue.

5.1.2 Analyse exploratoire des données

Nous voulons prédire une variable Y quantitative (la note finale) selon une variable prédicative X : le nombre d'heures de révision. Nous disposons de 30 données collectées. Ces données sont présentées sous forme d'un tableau dans la Figure ci-dessous.

Heures de révision	Note finale
2	6
4.5	8
7	11
10	14
12	13.5
15	17
18	19
20	18.5
...	...

5.2 Modélisation de la régression linéaire

Cette section est dédiée à la construction et à l'ajustement de notre modèle de régression linéaire simple. Nous détaillerons les étapes clés de ce processus, allant de la préparation rigoureuse des données à l'estimation des paramètres du modèle, en passant par sa validation statistique.

5.2.1 Préparation des données

La préparation des données constitue une étape cruciale dans le processus de modélisation statistique, en particulier pour la régression linéaire. Elle permet de garantir la qualité, la pertinence et la compatibilité des données avec les besoins du modèle.

- **Importation des bibliothèques**
  On commence par importer les bibliothèques nécessaires : NumPy pour les calculs vectoriels, Matplotlib pour la visualisation et SciPy pour les tests statistiques.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats

```

- **Chargement du jeu de données**
  Les données sont stockées dans des tableaux NumPy. La variable X représente le nombre d'heures de révision et la variable Y représente la note finale obtenue.

```

heures = np.array([2, 4.5, 7, 10, 12, 15, 18, 20,
                   3, 5, 8, 11, 13, 16, 19, 22,
                   2.5, 6, 9, 10.5, 14, 17, 19.5, 21,
                   3.5, 5.5, 8.5, 12.5, 15.5, 18.5])

notes = np.array([6, 8, 11, 14, 13.5, 17, 19, 18.5,
                  7, 9, 12, 14.5, 16, 17.5, 19.5, 20,
                  6.5, 10, 13, 15, 16.5, 18, 20, 19,
                  7.5, 9.5, 12.5, 15.5, 17, 18])

```

5.2.2 Estimation du modèle

Dans cette étape, les coefficients de la régression linéaire sont calculés. C'est lors de ce processus que le modèle est "ajusté" sur les données disponibles. Cela signifie que l'on détermine les paramètres qui minimisent la somme des carrés des erreurs entre les notes observées et les notes prédites.
La représentation du modèle de régression linéaire simple est donnée par la forme générale suivante :

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

où :

- $\hat{Y}$ représente la note finale prédite.
- $\hat{\beta}_0$ est l'ordonnée à l'origine (intercept). Il s'agit de la valeur estimée de Y lorsque le nombre d'heures de révision (X) est égal à zéro.
- $\hat{\beta}_1$ est le coefficient des heures de révision. Il indique le changement moyen estimé de la note ($\hat{Y}$) pour chaque heure de révision supplémentaire.

Nous utilisons la fonction `linregress` de la bibliothèque `scipy.stats` pour estimer les coefficients du modèle.

```
Beta_1, Beta_0, r_val, p_val, std_err = stats.linregress(heures, notes)
print(f"Equation : y = {Beta_1:.2f}x + {Beta_0:.2f}")
```

Cette capture illustre le code Python d'estimation du modèle à l'aide de `linregress` de `scipy.stats`. La fonction retourne : la pente ($\hat{\beta}_1$), l'ordonnée à l'origine ($\hat{\beta}_0$), le coefficient de corrélation (r), la p-value associée à la pente et l'erreur standard.

Suite à l'exécution de ce code, le résultat numérique direct de l'estimation des coefficients du modèle est affiché :

```
Equation : y = 0.73x + 5.27
```

D'où le modèle de régression linéaire simple estimé est :

$$\hat{Y} = 5,27 + 0,73X$$

L'interprétation de ce modèle est la suivante :

- L'ordonnée à l'origine ($\hat{\beta}_0 = 5,27$) : un étudiant qui ne révise pas ($X = 0$) obtiendrait une note estimée d'environ 5,27 sur 20.
- La pente ($\hat{\beta}_1 = 0,73$) : chaque heure de révision supplémentaire augmente la note finale estimée de 0,73 point en moyenne.

5.2.3 Validation du modèle

La validation du modèle est la phase critique qui nous permet de juger la pertinence, la qualité d'ajustement et la significativité statistique des relations établies par notre modèle de régression linéaire. Nous examinerons deux aspects principaux : la significativité globale du modèle (à l'aide du test F de Fisher) et la significativité de la variable explicative (à l'aide du test t de Student).

Analyse de la significativité globale (Test F de Fisher)

Pour déterminer si le modèle de régression est globalement statistiquement significatif, nous nous appuyons sur le test F de Fisher. Dans le cas de la régression simple, le test F est équivalent au test t de Student.
Le code Python ci-dessous montre le calcul des statistiques nécessaires pour le test F ainsi que le coefficient de détermination R^2 à partir des résultats de `linregress`.

```
r_carre = r_val ** 2

n = len(heures)
f_stat = (r_carre / 1) / ((1 - r_carre) / (n - 2))

f_critique = stats.f.ppf(q=1-0.05, dfn=1, dfd=n-2)

p_val_f = stats.f.sf(f_stat, 1, n - 2)

print(f" R   = {r_carre:.4f}")
print(f"F statistique = {f_stat:.4f}")
print(f"F critique (  =0.05) = {f_critique:.4f}")
print(f"p-value du F-test = {p_val_f:.6f}")
print(" TEST DE FISHER ")
print(f"F observe : {f_stat:.2f}")
print(f"F critique : {f_critique:.2f}")

if f_stat > f_critique:
    print("Conclusion : Le modèle est GLOBALEMENT significatif (F > F_crit)."
   )
else:
    print("Conclusion : Le modèle n'est pas globalement significatif.")

print(" TEST DE STUDENT ")
print(f"P-value de la pente : {p_val:.6f}")

if p_val < 0.05:
    print("Conclusion : L'impact des heures de revision est SIGNIFICATIF (p <
    0.05).")
else:
    print("Conclusion : On ne peut pas prouver un impact significatif des
   revisions.")
```

L'exécution de ce code génère la sortie numérique suivante, fournissant une évaluation complète des performances du modèle :

```
 R   = 0.9602
F statistique = 144.9132
F critique (  =0.05) = 5.9874
p-value du F-test = 0.000000

 TEST DE FISHER

F observe : 144.91
F critique : 5.99
```

```
Conclusion : Le modèle est GLOBALEMENT significatif (F > F_crit).

 TEST DE STUDENT
P-value de la pente : 0.000024
Conclusion : L'impact des heures de revision est SIGNIFICATIF (p < 0.05).
```

Interprétation des résultats

Les résultats obtenus nous permettent de tirer plusieurs conclusions importantes :

- **Coefficient de détermination** ($R^2 = 0,9602$) : Le modèle explique 96,02% de la variabilité des notes finales. C'est un très bon ajustement.
- **Test de Fisher** : La valeur observée ($F_{obs} = 144,91$) est largement supérieure à la valeur critique ($F_{crit} = 5,99$). Nous rejetons donc l'hypothèse nulle. Le modèle est globalement significatif.
- **Test de Student** : La p-value associée à la pente ($p = 0,000024$) est inférieure à $\alpha = 0,05$. La variable "heures de révision" a un impact réel et significatif sur la note finale.

5.2.4 Visualisation du modèle

Pour illustrer la qualité de l'ajustement, nous traçons le nuage de points des données observées ainsi que la droite de régression estimée :

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(heures, notes, color='blue', alpha=0.7, label='Donnees observees')

x_line = np.linspace(min(heures), max(heures), 100)
y_line = Beta_0 + Beta_1 * x_line
plt.plot(x_line, y_line, color='red', linewidth=2, label='Droite de regression')

plt.xlabel('Heures de revision')
plt.ylabel('Note finale')
plt.title('Impact des révisions sur la performance scolaire')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()
```

Ce graphique permet de visualiser la relation linéaire positive entre les heures de révision et la note finale, avec une dispersion relativement faible autour de la droite de régression, confirmant la bonne qualité du modèle, L'exécution de ce code :

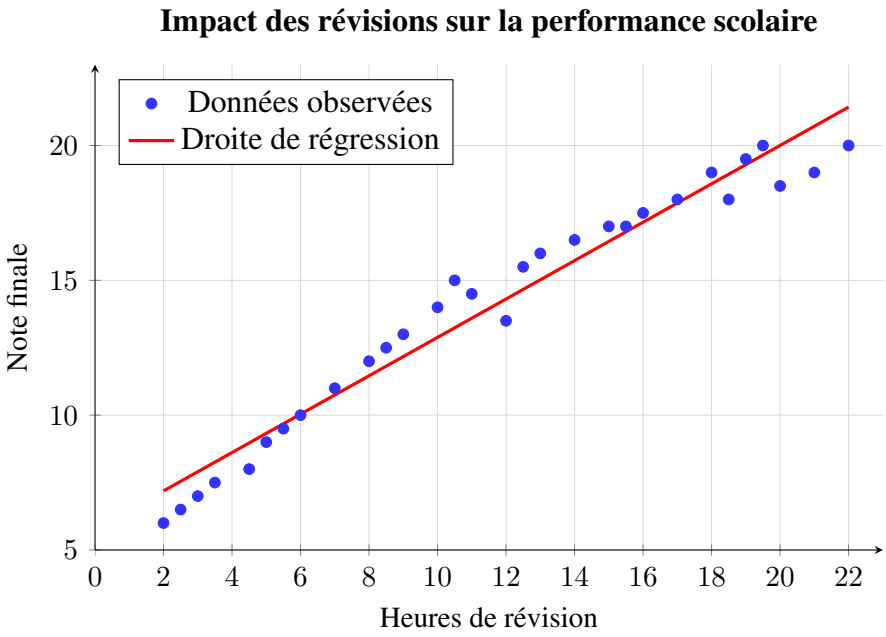


FIGURE 5.1 – Graphique de la régression linéaire entre le temps de révision et la note.

Complément : Utilisation de scikit-learn

Dans cette section complémentaire, nous utilisons la bibliothèque `scikit-learn`, plus spécifiquement la classe `LinearRegression`, pour construire le même modèle de régression linéaire.

Code Python :

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression


X = heures.reshape(-1, 1)
y = notes


modele_sklearn = LinearRegression()
modele_sklearn.fit(X, y)


beta_1_sklearn = modele_sklearn.coef_[0]
beta_0_sklearn = modele_sklearn.intercept_
r2_sklearn = modele_sklearn.score(X, y)

print("Resultats avec scikit-learn :")

print(f"Equation : y = {beta_1_sklearn:.2f}x + {beta_0_sklearn:.2f}")
print(f"Coefficient de determination R   = {r2_sklearn:.4f}")
```

Listing 5.1 – Estimation du modèle avec scikit-learn

Résultats obtenus :

```
Résultats avec scikit-learn :

Equation : y = 0.73x + 5.27
Coefficient de détermination R² = 0.9602
```

Comparaison entre SciPy et scikit-learn

Afin de montrer la cohérence des deux approches, nous présentons ci-dessous une comparaison directe entre la méthode `stats.linregress` de SciPy (utilisée précédemment) et la classe `LinearRegression` de scikit-learn.

Code de comparaison :

```
print("Comparaison des deux methodes :")

print(f"SciPy        : y = {beta_1_scipy:.4f}x + {beta_0_scipy:.4f}, R   = {r_val**2:.4f}")
print(f"scikit-learn : y = {beta_1_sklearn:.4f}x + {beta_0_sklearn:.4f}, R = {r2_sklearn:.4f}")

if abs(beta_1_scipy - beta_1_sklearn) < 0.0001:
    print("\ n   Conclusion : Les deux methodes donnent des resultats identiques.")
    print("   SciPy est parfait pour des calculs rapides et statistiques.")
    print("   scikit-learn est plus adapte aux projets de machine learning.")
```

Listing 5.2 – Comparaison des deux méthodes

Résultats de la comparaison :

```
Comparaison des deux methodes :

SciPy        : y = 0.7328x + 5.2734, R² = 0.9602
scikit-learn : y = 0.7328x + 5.2734, R² = 0.9602

 Conclusion : Les deux methodes donnent des resultats identiques.
   SciPy est parfait pour des calculs rapides et statistiques.
   scikit-learn est plus adapte aux projets de machine learning.
```

Interprétation : Les deux approches produisent strictement les mêmes résultats numériques. Cependant, leur utilisation diffère selon le contexte :

- **SciPy (`stats.linregress`)** : Idéal pour une analyse statistique rapide et simple. Il fournit directement des éléments supplémentaires comme la p-value, l'erreur standard et le coefficient de corrélation.
- **scikit-learn (`LinearRegression`)** : Plus adapté aux projets de *machine learning* et à la production. Il s'intègre facilement dans des chaînes de traitement plus complexes (prétraitement, validation croisée, etc.).

Ce complément montre que notre modèle est robuste et que les résultats sont reproductibles quel que soit l'outil utilisé.

6 Conclusion

L'objectif de ce projet était de présenter les fondements théoriques et pratiques de la régression linéaire simple, outil statistique incontournable pour l'analyse de la relation entre deux variables quantitatives. À travers ce travail, nous avons rappelé les concepts essentiels de la statistique inférentielle — population, échantillon, espérance, variance — avant d'aborder la modélisation linéaire proprement dite.

Nous avons exposé les hypothèses fondamentales du modèle (linéarité, indépendance des erreurs, homoscédasticité, normalité) ainsi que la méthode d'estimation des paramètres par les moindres carrés ordinaires (MCO). Nous avons également démontré les propriétés importantes des estimateurs — absence de biais, convergence — et présenté les principaux outils d'évaluation de la qualité du modèle : coefficient de corrélation de Pearson, coefficient de détermination R^2, tests de Student et de Fisher.

Ce travail met en évidence que la régression linéaire simple, bien qu'élémentaire, constitue une base solide pour comprendre des modèles plus complexes comme la régression linéaire multiple. Elle permet non seulement d'expliquer la variabilité d'une variable dépendante à partir d'une variable explicative, mais aussi de prédire des valeurs futures et de tester la significativité des relations observées.

Les perspectives de ce projet sont nombreuses. On pourrait, par exemple, étendre l'étude à la régression linéaire multiple afin de prendre en compte plusieurs facteurs explicatifs simultanément. L'analyse des résidus et la validation des hypothèses pourraient également être approfondies à l'aide de tests diagnostiques supplémentaires.

En définitive, ce projet m'a permis d'acquérir une maîtrise approfondie de la régression linéaire simple, tant sur le plan théorique que pratique, et constitue une étape importante dans ma formation au **CRMEF d'Oujda**.