



المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين لجهة الشرق
مسلك التأهيل - تخصص الرياضيات

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Visualiser l'Intégrale de Riemann

Une plateforme interactive WordPress pour comprendre comment l'intégrale se construit et se dessine

Technologie : Plateforme web interactive (WordPress)

إشراف الأستاذ	إنجاز المتدرب
الدرفوفي يونس	الهداجي سيف الدين
أعضاء لجنة المناقشة	تاريخ المناقشة
الصالح محمد	

Année universitaire : 2025 – 2026



Table des matières

Table des matières.....	2
Introduction générale	4
Le problème pédagogique	4
Notre solution et nos objectifs.....	4
Organisation du rapport.....	5
Public visé et prérequis	5
Chapitre 1 — De la somme de Riemann à l'intégrale.....	6
1.1 Le problème de l'aire sous une courbe	6
1.2 La méthode des rectangles	6
Exemple visuel : $f(x) = x^2$ sur $[0, 2]$	7
1.3 Notation sigma et sommes utiles	7
Application : calcul exact de l'aire sous x^2 sur $[0, 2]$	7
1.4 Sommes inférieures, supérieures et de Riemann	8
1.5 Passage à la limite : naissance de l'intégrale.....	8
1.6 L'intégrale au service des limites de suites	8
Exemple détaillé.....	9
Chapitre 2 — L'intégrale de Riemann : théorie rigoureuse.....	10
2.1 Subdivisions d'un intervalle.....	10
2.2 Sommes de Darboux.....	10
Propriétés	10
2.3 Définition de l'intégrale et critère d'intégrabilité	10
2.4 Fonctions intégrables.....	11
Un contre-exemple : une fonction non intégrable	12
2.5 Propriétés de l'intégrale	12
Chapitre 3 — Calcul et applications concrètes.....	13
3.1 Primitives et théorème fondamental.....	13
Primitives usuelles	13
3.2 Intégration par parties et changement de variable	14
3.3 Application en physique : distance et vitesse	14
3.4 Application en géométrie : aires et volumes.....	14
3.5 Application en économie : surplus et coûts	15
3.6 Application en probabilités : aire et probabilité	15
3.7 Synthèse : l'intégrale, un outil universel de cumul.....	15

Chapitre 4 — La plateforme interactive WordPress	17
4.1 Objectif et philosophie de la plateforme	17
4.2 Architecture WordPress et technologies	17
4.3 Module 1 : le visualiseur animé de convergence.....	18
Fonctionnement	18
L'animation de convergence	18
4.4 Module 2 : comparaison gauche / milieu / droite	18
4.5 Module 3 : exemples de la vie réelle.....	18
4.6 Module 4 : quiz et exercices interactifs	19
4.7 Correspondance entre la plateforme et la théorie	19
4.8 Scénario d'utilisation en classe	20
Conclusion générale.....	21
Bibliographie.....	22
Références mathématiques.....	22
Références techniques.....	22

Introduction générale

Lorsqu'on demande à un élève de 2^e année Baccalauréat ce qu'est une intégrale, et il vous répond souvent par une formule : « *c'est $F(b) - F(a)$* ». Cette réponse, évidemment correcte, mais il masque l'essentiel. Elle réduit un concept géométrique profond à une simple mécanique de calcul. L'élève sait *calculer* une intégrale, mais ne *voit* pas ce qu'elle représente en réalité.

Pourtant, l'intégrale est née d'un problème concret et visuel à partir duquel s'impose la question suivante : comment mesurer l'aire d'une surface délimitée par une courbe ? La réponse, élaborée depuis Archimède jusqu'à Riemann, consiste à découper cette surface en rectangles de plus en plus fins, puis à faire tendre leur nombre vers l'infini. C'est ce mouvement — ce passage de la somme de Riemann vers l'intégrale — qui constitue le cœur de la notion.

L'objectif de mon projet de fin d'études est précisément de rendre ce mouvement **visible**. J'ai conçu une plateforme web interactive, développée sous WordPress, qui permet à l'élève de voir avec ses propres yeux, comment l'intégrale se construit. Au début, n il choisit une fonction, observe les rectangles se multiplier, les voit s'affiner ou s'améliorer progressivement, et constate la somme de Riemann converger vers l'aire exacte sous la courbe. L'intégrale cesse alors d'être une formule abstraite pour devenir un objet que l'on voit naître et se dessiner.

Le problème pédagogique

L'enseignement traditionnel de l'intégrale présente plusieurs difficultés pour l'élève :

- La **définition formelle** (limite de sommes de Riemann) est abstraite et difficile à se représenter mentalement sans support visuel.
- Le **lien** entre l'objet géométrique (l'aire) et l'objet analytique (la limite) n'est pas immédiatement perçu.
- Les **applications concrètes** de l'intégrale (en physique, en économie) sont rarement montrées, ce qui rend la notion déconnectée du réel.

Notre solution et nos objectifs

Pour répondre à ce problème, notre plateforme poursuit les objectifs suivants :

- Montrer **visuellement et dynamiquement** comment la somme de Riemann converge vers l'intégrale, grâce à une animation où le nombre de rectangles augmente progressivement.
- Permettre à l'élève de **manipuler librement** : choisir sa propre fonction, son intervalle, et observer le résultat en temps réel.
- **Comparer** les différentes **méthodes d'approximation** (rectangles à gauche, au milieu, à droite) pour comprendre que la limite est la même.
- **Ancrer l'intégrale dans le réel** à travers des exemples de physique, géométrie, économie et probabilités.
- **Consolider les acquis** par un module de quiz et d'exercices interactifs.

Organisation du rapport

Le rapport comporte **quatre chapitres**. Le chapitre 1 montre comment l'on passe de la somme de Riemann à l'intégrale. Le chapitre 2 développe la théorie rigoureuse (sommes de Darboux, intégrabilité). Le chapitre 3 présente les techniques de calcul et surtout les applications concrètes. Le chapitre 4 décrit en détail la plateforme interactive WordPress et ses modules.

Public visé et prérequis

Ce projet s'adresse en priorité aux élèves de **2^e année Baccalauréat Sciences Mathématiques**, ainsi qu'à leurs enseignants. Les prérequis sont ceux du programme ; notion de fonction continue, de dérivée, de limite, et calcul algébrique de base. Aucune connaissance préalable en informatique n'est nécessaire pour utiliser la plateforme — il suffit d'un navigateur web.

Le rapport est conçu pour être lu de deux manières. Une lecture **linéaire** suit la construction logique de l'intégrale, du concret vers l'abstrait. Une lecture **thématique** permet à l'enseignant de piocher directement dans les applications (chapitre 3) ou dans la description des modules (chapitre 4) selon ses besoins. Les couleurs des encadrés choisis — définitions en bleu, applications en orange, remarques pédagogiques — facilitent ce repérage rapide pour faciliter la compréhension.

J'espère que ce projet marquera le début de ce que je ferai à l'avenir pour aider mes élèves à saisir les concepts mathématiques et à en comprendre la plupart, afin qu'ils puissent apprécier la beauté des mathématiques au lieu de recevoir des enseignements théoriques et de les mémoriser sans aucune conscience ni compréhension de cet art.

Chapitre 1 — De la somme de Riemann à l'intégrale

Ce chapitre suit le cheminement intuitif qui mène à l'intégrale. Nous partons d'un problème simple — mesurer une aire — et nous montrons comment l'idée de découper en rectangles, puis de passer à la limite, fait naître l'intégrale. C'est exactement ce cheminement que la plateforme rendra visible ou animé.

1.1 Le problème de l'aire sous une courbe

L'aire d'un rectangle est *base* $\times$ *hauteur*. L'aire d'un triangle, d'un trapèze, de tout polygone se ramène à des additions de rectangles. Mais la question posée est comment calculer l'aire d'une région dont l'un des bords est une **courbe** ?

Considérons une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. On cherche l'aire de la région comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses, et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$. Cette aire n'a pas de formule simple — sauf à inventer une méthode nouvelle.

Pourquoi c'est important. Tout le calcul intégral est né de cette question. La réponse — découper et sommer — est l'une des idées les plus fécondes des mathématiques, du calcul d'aires jusqu'aux probabilités.

Historiquement, le problème est ancien. Dès l'Antiquité, **Archimède** calculait l'aire sous une parabole par sa célèbre méthode d'exhaustion : il encadrait la surface par des polygones de plus en plus nombreux. Au XVII^e siècle, Newton et Leibniz relient ce calcul d'aires à la dérivation. Mais il faut attendre **Bernhard Riemann**, au XIX^e siècle, pour en obtenir une définition pleinement rigoureuse, fondée sur les sommes qui portent aujourd'hui son nom. C'est cette construction historique que notre projet retrace, de l'intuition géométrique à la formalisation.

1.2 La méthode des rectangles

L'idée géniale, qui remonte à **Archimède**, est d'approcher l'aire inconnue par des rectangles dont on sait calculer l'aire. On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux égaux de largeur $\Delta x = (b-a)/n$, et sur chaque morceau on dresse un rectangle.

Selon la hauteur choisie pour chaque rectangle, on obtient trois approximations :

- **Rectangles à gauche** : hauteur = valeur de f à la borne gauche du morceau.
- **Rectangles à droite** : hauteur = valeur de f à la borne droite du morceau.
- **Rectangles au milieu** : hauteur = valeur de f au centre du morceau.

Si l'on prend systématiquement le **minimum** de f sur chaque morceau, on obtient des rectangles entièrement sous la courbe : leur somme, notée s_n , est inférieure à l'aire réelle. Si l'on prend le **maximum**, les rectangles dépassent la courbe : leur somme S_n est supérieure à l'aire réelle. On encadre ainsi l'aire :

$$s_n \leq \text{Aire réelle} \leq S_n$$

Exemple visuel : $f(x) = x^2$ sur $[0, 2]$

Prenons $f(x) = x^2$ sur $[0, 2]$. Avec $n = 5$ rectangles (largeur $\Delta x = 0,4$), en utilisant les valeurs aux bornes, on obtient une première approximation grossière. Le tableau suivant montre comment l'approximation s'améliore quand n augmente — c'est exactement ce que l'élève verra à l'écran sur la plateforme :

n	Somme inférieure s_n	Somme supérieure S_n	Écart $S_n - s_n$
5	2,2400	3,2800	1,0400
10	2,4600	2,8600	0,4000
50	2,6268	2,7068	0,0800
100	2,6467	2,6867	0,0400
1 000	2,6647	2,6687	0,0040
$\rightarrow \infty$	$8/3 \approx 2,6667$	$8/3 \approx 2,6667$	0

On voit que s_n **monte**, S_n **descend**, et toutes deux se rapprochent de $8/3 \approx 2,6667$. L'écart $S_n - s_n$ s'écrase vers zéro. Cette valeur commune, $8/3$, est l'aire exacte : c'est l'intégrale $\int_0^2 x^2 dx$.

1.3 Notation sigma et sommes utiles**Définition — Notation sigma**

La somme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ se note $\sum_{i=1}^n a_i$. L'indice i est **muet**, 1 et n sont les bornes.

Pour calculer explicitement les sommes de rectangles, on a besoin des trois formules suivantes (démonstrables par récurrence) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= n(n+1)/2 \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= n(n+1)(2n+1)/6 \\ \sum_{i=1}^n i^3 &= [n(n+1)/2]^2\end{aligned}$$

Vérification. Pour $n = 4$: $\sum i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$, et la formule donne $4 \cdot 5 \cdot 9 / 6 = 30$. ✓ Ces formules sont la clé du calcul direct des sommes de Riemann.

Application : calcul exact de l'aire sous x^2 sur $[0, 2]$

Ces formules permettent de retrouver, sans tableau numérique, la valeur $8/3$ du paragraphe précédent. Avec $\Delta x = 2/n$ et la borne droite $c_i = 2i/n$, la somme de Riemann à droite vaut :

$$R_n = \sum_{i=1}^n (2i/n)^2 \cdot (2/n) = (8/n^3) \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

En remplaçant $\sum i^2$ par sa formule $n(n+1)(2n+1)/6$:

$$R_n = (8/n^3) \cdot n(n+1)(2n+1)/6 = (8/6) \cdot (n+1)(2n+1)/n^2$$

Méthode

Quand $n \rightarrow +\infty$, $(n+1)(2n+1)/n^2 \rightarrow 2$, donc $R_n \rightarrow (8/6) \cdot 2 = 8/3$. On retrouve bien la valeur exacte de l'aire, confirmant le résultat numérique du tableau.

1.4 Sommes inférieures, supérieures et de Riemann**Définition — Les trois sommes**

Sur une subdivision de $[a, b]$ en n morceaux $[x_{i-1}, x_i]$ de largeur Δx :

- Somme inférieure : $s_n = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x$, où $m_i = \min$ de f sur le i^{e} morceau
- Somme supérieure : $S_n = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x$, où $M_i = \max$ de f sur le i^{e} morceau
- Somme de Riemann : $R_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$, où c_i est un point quelconque du i^{e} morceau

On a toujours : $s_n \leq R_n \leq S_n$.

Remarque. La somme de Riemann est la plus générale : on a le droit de choisir le point c_i comme on veut dans chaque morceau (gauche, milieu, droite, ou n'importe où). C'est ce que la plateforme permettra de tester en direct, pour montrer que le choix de c_i ne change pas la limite.

1.5 Passage à la limite : naissance de l'intégrale

Voici le moment clé. Quand n tend vers l'infini, les rectangles deviennent infiniment fins, et les trois sommes (inférieure, supérieure, de Riemann) convergent toutes vers une même valeur. Cette valeur est l'**intégrale**.

Définition — L'intégrale comme limite

Soit f continue et positive sur $[a, b]$. L'aire sous la courbe — l'intégrale de f sur $[a, b]$ — est :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$$

où $\Delta x = (b-a)/n$ et $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Cette limite ne dépend pas du choix des c_i .

Remarque. Le symbole $\int$ est un « S » allongé : il rappelle que l'intégrale est une Somme — une somme infinie de rectangles infiniment fins. Le dx représente la largeur Δx devenue infinitésimale. Comprendre cela, c'est comprendre l'intégrale. C'est tout l'enjeu de la plateforme.

1.6 L'intégrale au service des limites de suites

La relation entre somme de Riemann et intégrale fonctionne **dans les deux sens**. Non seulement l'intégrale est une limite de sommes, mais elle permet aussi de calculer la limite de certaines suites qui semblent inaccessibles. Le principe : reconnaître dans la suite une somme de Riemann sur $[0, 1]$.

Si l'on peut écrire une suite sous la forme $u_n = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n f(i/n)$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(x) dx$$

Exemple détaillé

Calculons la limite de la suite $u_n = \sum_{i=1}^n n/(n^2 + i^2)$. On factorise le dénominateur par n^2 pour faire apparaître la forme caractéristique :

$$u_n = \sum_{i=1}^n n/(n^2 + i^2) = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n 1/(1 + (i/n)^2)$$

On reconnaît la fonction $f(x) = 1/(1 + x^2)$ sur $[0, 1]$, avec le pas $1/n$ et les points i/n . Donc :

$$\lim u_n = \int_0^1 dx/(1 + x^2) = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \pi/4$$

Une suite a priori compliquée a ainsi une limite remarquable : $\pi/4$. Ce type de calcul, fondé entièrement sur la définition de l'intégrale, est proposé dans le module d'exercices de la plateforme.

Un second exemple. La suite $v_n = (1^k + 2^k + \dots + n^k)/n^{k+1}$ s'écrit $(1/n) \cdot \sum (i/n)^k$, donc tend vers $\int_0^1 x^k dx = 1/(k+1)$. Par exemple, pour $k = 2$, la somme des carrés divisée par n^3 tend vers $1/3$. Là encore, c'est la définition de l'intégrale qui livre la limite, sans aucun calcul de suite direct.

Chapitre 2 — L'intégrale de Riemann : théorie rigoureuse

Le chapitre précédent a donné l'intuition. Ici, nous posons les **fondations rigoureuses** : subdivisions, sommes de Darboux, et la définition précise de l'intégrabilité. Ce cadre permet de savoir exactement quelles fonctions admettent une intégrale.

2.1 Subdivisions d'un intervalle

Définition — Subdivision

Une **subdivision** S de $[a, b]$ est une suite finie : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. La longueur du k^e morceau est $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Le **pas** est $p(S) = \max\{\Delta x_k\}$. S est **uniforme** si tous les Δx_k sont égaux à $(b-a)/n$.

Le pas mesure la finesse de la subdivision : plus il est petit, mieux les rectangles épousent la courbe. Pour une subdivision uniforme, $p(S) \rightarrow 0$ équivaut à $n \rightarrow +\infty$.

2.2 Sommes de Darboux

Soit f bornée sur $[a, b]$. Pour chaque morceau, on pose $m_i = \inf f$ et $M_i = \sup f$ sur $[x_{i-1}, x_i]$. Cette approche, due à Darboux, supprime tout choix arbitraire de point intermédiaire : on prend toujours le plus petit et le plus grand.

Définition — Sommes de Darboux

Somme inférieure : $d(f, S) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$
 Somme supérieure : $D(f, S) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$
 On a toujours $d(f, S) \leq D(f, S)$.

Propriétés

- Si S' est **plus fine** que S : $d(f, S) \leq d(f, S')$ et $D(f, S') \leq D(f, S)$. Raffiner resserre l'encadrement.
- Pour deux subdivisions quelconques S_1, S_2 : $d(f, S_1) \leq D(f, S_2)$. Toute somme inférieure est inférieure à toute somme supérieure.

2.3 Définition de l'intégrale et critère d'intégrabilité

Définition — Intégrale de Riemann

f est **intégrable** sur $[a, b]$ si et seulement si : $\sup\{d(f, S)\} = \inf\{D(f, S)\}$. Cette valeur commune est notée $\int_a^b f(x) dx$.

Théorème — Critère d'intégrabilité

f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que $D(f, S) - d(f, S) < \varepsilon$.

La quantité $D(f, S) - d(f, S)$ se décompose en :

$$D(f, S) - d(f, S) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k \cdot (M_k - m_k)$$

Chaque terme est l'aire d'un « **rectangle d'erreur** ». f est intégrable si la somme totale de ces erreurs peut devenir aussi petite qu'on veut. La plateforme visualise précisément ces rectangles d'erreur (la zone entre rectangles inférieurs et supérieurs).

2.4 Fonctions intégrables**Théorème — Fonctions monotones**

Toute fonction **monotone** sur $[a, b]$ est intégrable. Pour une subdivision uniforme :

$$D(f, S) - d(f, S) = (b-a)/n \cdot |f(b) - f(a)| \rightarrow 0$$

Démonstration (cas croissant). Si f est croissante, sur chaque morceau le minimum est à gauche ($m_i = f(x_{i-1})$) et le maximum à droite ($M_i = f(x_i)$). La somme $D - d = \Delta x \cdot \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})]$ est télescopique et vaut $\Delta x \cdot [f(b) - f(a)] = (b-a)/n \cdot [f(b) - f(a)]$, qui tend vers 0. Le critère d'intégrabilité est donc vérifié. ■

Théorème — Fonctions continues

Toute fonction **continue** sur $[a, b]$ est intégrable (grâce à la continuité uniforme sur le compact $[a, b]$).

Idée de la démonstration. f continue sur le segment $[a, b]$ y est uniformément continue (théorème de Heine). Pour $\varepsilon > 0$, on trouve un pas assez petit pour que l'oscillation $M_i - m_i$ de f sur chaque morceau soit inférieure à $\varepsilon/(b-a)$. Alors $D - d = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon$. Le critère est satisfait. ■

Remarque. Toutes les fonctions du programme de 2 Bac Sciences Maths (polynômes, sin, cos, exp, ln, racines, fractions rationnelles continues) sont donc intégrables. L'élève peut entrer n'importe laquelle de ces fonctions dans la plateforme sans crainte.

Un contre-exemple : une fonction non intégrable

Toutes les fonctions ne sont pas intégrables. L'exemple classique est la **fonction de Dirichlet** sur $[0, 1]$, définie par $\chi(x) = 1$ si x est rationnel et $\chi(x) = 0$ si x est irrationnel. Sur *tout* sous-intervalle, aussi petit soit-il, on trouve à la fois des rationnels et des irrationnels : donc $m_i = 0$ et $M_i = 1$ partout. Il en résulte :

$$d(\chi, S) = 0 \quad \text{et} \quad D(\chi, S) = 1 - 0 = 1 \quad \text{pour toute subdivision } S$$

L'écart $D - d$ vaut toujours 1, sans jamais pouvoir descendre en dessous de $\varepsilon = 1/2$. Le critère d'intégrabilité n'est jamais satisfait : χ n'est pas intégrable au sens de Riemann. Ce contre-exemple montre que la condition d'intégrabilité est une véritable contrainte, et non une formalité.

2.5 Propriétés de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

b) Positivité

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f dx \geq 0$. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$.

c) Relation de Chasles

Pour $c \in [a, b]$: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$. De plus $\int_a^a f dx = 0$ et $\int^{ba} f dx = -\int_a^b f dx$.

d) Inégalité de la valeur absolue

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

e) Formule de la moyenne

Si $m \leq f \leq M$: $m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$. Si f continue, $\exists c \in]a, b[$: $\int_a^b f dx = f(c)(b-a)$.

Ces cinq propriétés forment la **boîte à outils** du calcul intégral. Elles se démontrent toutes en revenant aux sommes de Riemann puis en passant à la limite : la linéarité vient de la linéarité de la somme, la positivité du fait que chaque terme $f(c_i)\Delta x$ est positif, etc. Munis de ce cadre rigoureux, nous pouvons aborder au chapitre suivant les techniques de calcul effectif et, surtout, les applications qui donnent tout son sens à l'intégrale.

Chapitre 3 — Calcul et applications concrètes

Ce chapitre donne d'abord les outils de calcul, puis — et c'est l'apport central pour mon projet — montre comment l'intégrale se manifeste ou s'apparaît plus précisément dans le **monde réel**. Ces applications seront intégrées comme des exemples vivants dans la plateforme.

3.1 Primitives et théorème fondamental

Définition — Primitive

F est une **primitive** de f sur I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Deux primitives diffèrent d'une constante.

Théorème — Théorème fondamental du calcul intégral

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ce théorème transforme le calcul d'aire (limite de sommes) en un simple calcul de primitive. C'est l'outil le plus puissant du calcul intégral.

Lien dérivation / intégration. Réciproquement, si l'on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$: la dérivée de l'intégrale (vue comme fonction de sa borne) redonne la fonction de départ. Intégrer et dériver sont donc deux opérations inverses, exactement comme multiplier et diviser.

Exemple. Reprenons $\int_0^2 x^2 dx$. Une primitive de x^2 est $x^3/3$. Donc $\int_0^2 x^2 dx = [x^3/3]_0^2 = 8/3 - 0 = 8/3$. On retrouve instantanément, en une ligne, le résultat obtenu péniblement par les sommes de Riemann au chapitre 1. C'est toute la force du théorème fondamental.

Primitives usuelles

f(x)	Primitive F(x)	f(x)	Primitive F(x)
x^n ($n \neq -1$)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\cos x$	$\sin x$
$1/x$	$\ln x $	$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x	$1/(1+x^2)$	$\arctan x$

3.2 Intégration par parties et changement de variable

Théorème — Intégration par parties

$$\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v dx$$

Exemple. $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx$: on pose $u = x$, $v' = \cos x \rightarrow [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \pi/2 + [\cos x]_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1$.

L'intégration par parties sert aussi à **abaisser le degré** d'un polynôme. Pour $\int x^2 \cdot e^x dx$, une première IPP ($u = x^2$, $v' = e^x$) ramène à $\int x \cdot e^x dx$, puis une seconde ($u = x$, $v' = e^x$) ramène à $\int e^x dx$, immédiate. On obtient $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$. Le degré du polynôme diminue d'une unité à chaque étape.

Théorème — Changement de variable

Pour φ de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Exemple. $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$: on pose $t = 1 - x^2$ ($dt = -2x dx$) $\rightarrow = (1/2) \int_0^1 \sqrt{t} dt = (1/2) \cdot [(2/3)t^{3/2}]_0^1 = 1/3$.

3.3 Application en physique : distance et vitesse

C'est l'application la plus parlante pour un élève. Si un objet se déplace à une vitesse $v(t)$ variable, la **distance parcourue** entre les instants $t = a$ et $t = b$ est exactement l'intégrale de la vitesse :

$$Distance = \int_a^b v(t) dt$$

L'interprétation par les rectangles est limpide : sur un petit intervalle de temps Δt , la distance parcourue est environ $v(t) \cdot \Delta t$ (vitesse $\times$ temps). En sommant tous ces petits déplacements et en faisant $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient la distance totale. La somme de Riemann **EST** physiquement la somme des petits déplacements.

Exemple. Une voiture accélère avec $v(t) = 2t$ (en m/s). Distance entre $t = 0$ et $t = 5$ s : $\int_0^5 2t dt = [t^2]_0^5 = 25$ mètres. Sur la plateforme, l'élève voit chaque rectangle comme un petit bout de trajet.

3.4 Application en géométrie : aires et volumes

Au-delà de l'aire sous une courbe, l'intégrale calcule des **volumes**. Le volume d'un solide de révolution engendré par la rotation de la courbe de f autour de l'axe des x est :

$$Volume = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Ici, chaque rectangle de la somme de Riemann engendre un petit disque (cylindre fin) de rayon $f(x)$ et d'épaisseur Δx , donc de volume $\pi[f(x)]^2 \cdot \Delta x$. La somme de tous ces disques donne le volume total.

Exemple. Volume d'un cône de rayon R et hauteur h : on fait tourner la droite $f(x) = (R/h) \cdot x$. $V = \pi \int_0^h (R/h)^2 x^2 dx = \pi(R^2/h^2) \cdot [x^3/3]_0^h = (1/3)\pi R^2 h$. On retrouve la formule classique du cône !

3.5 Application en économie : surplus et coûts

En économie, l'intégrale mesure des **grandeurs cumulées**. Le surplus du consommateur, par exemple, est l'aire entre la courbe de demande et le prix du marché :

$$Surplus = \int_0^Q [D(q) - p] dq$$

où $D(q)$ est la fonction de demande, p le prix, et Q la quantité échangée. De même, le coût total de production se calcule en intégrant le coût marginal : Coût total = $\int_0^Q C_m(q) dq$. Chaque rectangle représente le coût d'une petite quantité supplémentaire produite.

3.6 Application en probabilités : aire et probabilité

C'est l'une des applications les plus profondes. Pour une variable aléatoire continue de densité f , la **probabilité** que X soit compris entre a et b est exactement l'aire sous la courbe de densité :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ici, l'intégrale n'est plus seulement une aire abstraite : c'est une **probabilité**, un nombre entre 0 et 1. L'aire totale sous une densité vaut toujours 1 (l'événement certain). La somme de Riemann découpe la probabilité en petites tranches : la probabilité d'être dans un petit intervalle est environ $f(x) \cdot \Delta x$.

Exemple. Pour la loi uniforme sur $[0, 1]$, la densité est $f(x) = 1$. $P(0,2 \leq X \leq 0,5) = \int_{0,2}^{0,5} 1 dx = 0,3$. L'aire du rectangle est directement la probabilité.

3.7 Synthèse : l'intégrale, un outil universel de cumul

Les quatre applications précédentes révèlent une unité profonde. Dans chaque domaine, l'intégrale répond à la même question : **comment additionner une infinité de contributions infiniment petites ?** Le tableau suivant met en regard ces interprétations.

Domaine	Le rectangle $f(x) \cdot \Delta x$ représente	L'intégrale $\int f$ représente
Géométrie	Une fine bande d'aire	L'aire totale sous la courbe
Physique	Un petit déplacement $v \cdot \Delta t$	La distance totale parcourue

Domaine	Le rectangle $f(x) \cdot \Delta x$ représente	L'intégrale $\int f$ représente
Volumes	Un disque mince $\pi[f]^2 \cdot \Delta x$	Le volume du solide
Économie	Un petit surplus	Le surplus total / le coût total
Probabilités	Une petite probabilité $f \cdot \Delta x$	La probabilité $P(a \leq X \leq b)$

Cette universalité explique pourquoi l'intégrale est l'un des concepts les plus importants de toutes les sciences. Une seule idée — **découper, sommer, passer à la limite** — résout des problèmes qui semblent sans rapport : mesurer une aire, prévoir une distance, calculer un volume, évaluer un surplus, estimer une probabilité. C'est précisément cette unité que la plateforme cherche à faire ressentir : en montrant que les mêmes rectangles, selon le contexte, deviennent des trajets, des disques, des surplus ou des probabilités.

Valeur moyenne. La formule de la moyenne du chapitre 2 trouve ici une lecture concrète : la valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$, égale à $(1/(b-a)) \cdot \int_a^b f \, dx$, est par exemple la vitesse moyenne d'un trajet, ou la température moyenne d'une journée. L'intégrale ne sert donc pas qu'à cumuler : elle sert aussi à moyenner.

Chapitre 4 — La plateforme interactive WordPress

Ce chapitre décrit la plateforme développée dans le cadre du projet. Conçue sous **WordPress** pour être facilement accessible, modifiable et hébergeable, elle traduit en outil concret toute la théorie des chapitres précédents.

4.1 Objectif et philosophie de la plateforme

La philosophie de la plateforme tient en une phrase : ***faire voir l'intégrale, pas seulement la calculer***. Chaque module est conçu pour que l'élève manipule, observe, et comprenne par lui-même comment la somme de Riemann devient une intégrale.

La plateforme repose sur trois principes pédagogiques :

- **Interactivité** : l'élève agit (saisit, déplace, clique) et voit le résultat immédiatement.
- **Progressivité** : on part du visuel et de l'intuition avant la formule abstraite.
- **Ancrage dans le réel** : chaque notion est reliée à une application concrète.

4.2 Architecture WordPress et technologies

La plateforme est construite sur WordPress, ce qui permet une gestion simple du contenu pédagogique (cours, pages, articles) et une mise à jour aisée par l'enseignant. Les modules interactifs sont intégrés dans les pages WordPress de la façon suivante :

Composant	Technologie	Rôle
CMS de base	WordPress	Gestion des pages de cours et navigation
Modules interactifs	HTML5 + JavaScript	Visualisations et animations
Tracé des graphes	Chart.js / p5.js	Courbes et rectangles dynamiques
Calcul mathématique	Math.js	Évaluation des fonctions saisies
Formules affichées	MathJax	Rendu LaTeX des formules
Intégration WP	Shortcodes / plugin	Insertion des modules dans les pages

Les modules sont encapsulés dans des **shortcodes WordPress** (par exemple [riemann_visualiseur]), ce qui permet de les insérer dans n'importe quelle page ou article d'un simple copier-coller.

Ce choix d'architecture présente plusieurs avantages décisifs pour un usage scolaire. **WordPress** est gratuit, open-source et largement documenté ; il ne nécessite aucune compétence de programmation pour la mise à jour du contenu. Les bibliothèques utilisées (Chart.js, p5.js, Math.js, MathJax) sont elles aussi libres et chargées directement dans le navigateur, sans installation côté élève. Enfin, le découpage en modules indépendants permet d'enrichir la plateforme progressivement : on peut ajouter un nouveau module sans toucher aux autres.

4.3 Module 1 : le visualiseur animé de convergence

C'est le **module phare** de la plateforme, celui qui répond directement à l'objectif du projet : montrer comment l'intégrale se dessine.

Fonctionnement

- L'élève saisit une fonction $f(x)$ (ex : x^2 , $\sin(x)$, $-x^2+5$) et un intervalle $[a, b]$.
- La courbe de f s'affiche immédiatement dans un repère.
- Un curseur permet de choisir le nombre n de rectangles (de 1 à 500).
- Les rectangles se dessinent sous la courbe, et leur somme s'affiche en direct.

L'animation de convergence

En cliquant sur le bouton « **Animer** », l'élève déclenche une animation où n augmente automatiquement : 2, 5, 10, 20, 50, 100... Les rectangles s'affinent sous ses yeux, et il voit la valeur de la somme de Riemann se rapprocher progressivement de la valeur exacte de l'intégrale, affichée en parallèle. Un compteur montre l'écart $S_n - s_n$ qui tend vers zéro. C'est le moment « **eurêka** » : l'élève comprend visuellement le passage à la limite.

4.4 Module 2 : comparaison gauche / milieu / droite

Ce module affiche côte à côte trois approximations de la même intégrale : avec les rectangles à gauche, au milieu, et à droite. L'élève observe que :

- Pour une petite valeur de n , les trois résultats sont **différents**.
- Quand n augmente, les trois résultats **convergent vers la même valeur**.
- La méthode du **milieu** converge le plus vite (meilleure approximation).

Ce module fait comprendre concrètement une idée subtile de la théorie : le **choix du point c_i dans chaque morceau n'a aucune importance à la limite**. C'est la visualisation directe de la propriété d'indépendance vue au chapitre 1.

4.5 Module 3 : exemples de la vie réelle

Ce module relie l'intégrale au monde réel à travers quatre situations interactives, correspondant aux applications du chapitre 3 :

Situation	Ce que l'élève manipule	Ce qu'il découvre
Physique	Courbe de vitesse $v(t)$	L'aire = distance parcourue
Géométrie	Rotation d'une courbe	L'intégrale = volume du solide
Économie	Courbe de demande	L'aire = surplus du consommateur
Probabilités	Courbe de densité	L'aire = probabilité (entre 0 et 1)

Dans chaque cas, les rectangles de la somme de Riemann reçoivent une **signification physique** : un petit déplacement, un disque fin, un petit surplus, une petite probabilité. L'élève comprend que l'intégrale n'est pas qu'une aire abstraite — c'est un outil universel de cumul.

4.6 Module 4 : quiz et exercices interactifs

Pour consolider les acquis, ce module propose des exercices à correction immédiate :

- **QCM** sur les définitions (somme de Riemann, somme de Darboux, intégrabilité).
- **Vrai/Faux** sur les propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, Chasles).
- **Estimation visuelle** : on montre une courbe, l'élève estime l'aire, la plateforme corrige.
- **Calculs guidés** : l'élève calcule une intégrale par parties, étape par étape, avec validation.

Chaque réponse est accompagnée d'une explication, et un système de score encourage la progression. Les exercices sont tirés des fonctions classiques du programme de 2 Bac.

4.7 Correspondance entre la plateforme et la théorie

Le tableau suivant montre que chaque élément visuel de la plateforme correspond exactement à un concept mathématique rigoureux. La plateforme n'est pas un gadget : **c'est la théorie rendue visible**.

Sur la plateforme	Dans la théorie
Curseur du nombre n	Subdivision uniforme en n morceaux
Rectangles bleus (sous la courbe)	Somme inférieure $s_n = d(f, S)$
Rectangles rouges (au-dessus)	Somme supérieure $S_n = D(f, S)$
Rectangles avec point choisi	Somme de Riemann $R_n = \sum f(c_i)\Delta x$
Bouton « Animer » (n grandit)	Passage à la limite $n \rightarrow +\infty$
Écart $S_n - s_n$ qui tend vers 0	Critère d'intégrabilité de Riemann
Zone verte sous la courbe	Valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$
Comparaison gauche/milieu/droite	Indépendance du choix de c_i
Modules vie réelle	Applications de l'intégrale

4.8 Scénario d'utilisation en classe

La plateforme n'est pas seulement un objet technique : elle est pensée pour s'insérer dans une **séance pédagogique réelle**. Voici un scénario type d'utilisation, en classe de 2^e Bac Sciences Mathématiques, pour introduire la notion d'intégrale.

Étape	Activité de l'élève	Rôle de la plateforme
1. Découverte	Observer une aire à mesurer	Affiche la courbe et la zone à mesurer
2. Approximation	Régler $n = 5$ puis $n = 10$	Dessine les rectangles, affiche s_n et S_n
3. Conjecture	Anticiper la limite	Montre l'écart qui diminue
4. Animation	Lancer « Animer »	Fait converger les sommes vers l'intégrale
5. Généralisation	Tester d'autres fonctions	Recalcule en temps réel
6. Application	Explorer la physique	Relie l'aire à une distance réelle

Ce déroulé respecte la progression naturelle de l'apprentissage, on part de l'**observation**, on passe par la **conjecture**, puis par la **vérification**, avant d'arriver à la **généralisation**. L'élève n'est jamais passif par contre il est actif, à chaque étape il agit et la plateforme réagit, donc cette boucle action-réaction qui ancre durablement la bonne compréhension et le bon apprentissage ce que je vise.

Avantage pédagogique. En rendant l'erreur (l'écart $S_n - s_n$) visible et mesurable, la plateforme transforme une notion abstraite — la convergence — en une expérience concrète que l'élève contrôle de sa main. La limite n'est plus un mot, c'est un mouvement qu'il a lui-même déclenché.

Conclusion générale

Ce projet de fin d'études est parti d'un constat simple j'en suis arrivé à cette conclusion lors des séances d'enseignement que j'ai animées dans le cadre de mon travail pédagogiques (stage). L'intégrale est trop souvent réduite à une formule, alors qu'elle est avant tout une **idée géométrique et dynamique**. Notre ambition était de redonner à cette idée toute sa dimension visuelle.

Sur le plan **théorique**, nous avons reconstruit le concept d'intégrale en suivant son cheminement naturel ; du problème de l'aire à la méthode des rectangles, des sommes de Riemann au passage à la limite, puis vers la théorie rigoureuse de Darboux et les techniques de calcul. Nous avons surtout insisté sur les applications concrètes — physique, géométrie, économie, probabilités — qui donnent à l'intégrale tout son sens.

Sur le plan **pratique**, la plateforme WordPress développée atteint l'objectif fixé : elle fait voir l'intégrale se construire. Grâce au visualiseur animé, l'élève observe la somme de Riemann converger vers l'intégrale, rectangle après rectangle. Grâce aux modules de comparaison, d'applications réelles et de quiz, il comprend que l'intégrale n'est pas une abstraction mais un outil puissant et concret.

Ce travail montre que le numérique, bien utilisé, ne dispense pas de la rigueur mathématique : **il la rend accessible**. En voyant l'intégrale naître sous ses yeux, l'élève de 2 Bac Sciences Maths ne mémorise plus une formule — il comprend une idée et c'est là sans doute la plus belle réussite que puisse viser un outil pédagogique.

Au-delà de cet aspect du cas particulier de l'intégrale, ce projet illustre une conviction et une certitude plus large : **les mathématiques se comprennent mieux quand on les voit en mouvement**. Une définition statique, écrite au tableau, fige un concept qui est par nature dynamique. La somme de Riemann n'est pas une formule immobile : c'est un processus, une suite de rectangles qui s'affinent, une convergence qui s'opère. En restituant ce mouvement à l'écran, la plateforme ne fait que rendre à la notion sa vérité première. C'est cette démarche — partir du geste pour arriver à la formule, et non l'inverse — qui pourrait, demain, s'appliquer à bien d'autres notions de l'analyse.

Perspectives. Plusieurs pistes d'amélioration restent ouvertes : ajout des intégrales impropres, des intégrales doubles, d'un mode collaboratif où les élèves partagent leurs fonctions, ou encore d'une version mobile native. La plateforme, conçue de façon modulaire sous WordPress, est prête à accueillir ces évolutions.

Bibliographie

Références mathématiques

- [1] Jean-Pierre Ramis, Augustin Warusfel. *Mathématiques — Tout le cours en fiches*. Dunod, 2013.
- [2] James Stewart. *Calculus — Early Transcendentals*, 8^e édition. Cengage Learning, 2015.
- [3] Walter Rudin. *Principes d'Analyse Mathématique*. McGraw-Hill, 1976.
- [4] Programme officiel de Mathématiques — 2^e année Baccalauréat Sciences Mathématiques. Maroc.

Références techniques

- [5] WordPress — Documentation officielle. <https://wordpress.org/documentation/>
- [6] Math.js — JavaScript math library. <https://mathjs.org>
- [7] Chart.js — JavaScript charting library. <https://www.chartjs.org>
- [8] p5.js — Creative coding library. <https://p5js.org>
- [9] MathJax — LaTeX rendering. <https://www.mathjax.org>